Analysis III, 3. Übung

Aufgabe 2.3

$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(a) = y_0$

$f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, für jedes feste $x \in [a,b]$ monoton fallend in der 2. Variable

Lösung: $y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien Lösungen des AWPs

Annahme: $y_1 \neq y_2 \Rightarrow \exists\, \xi_0 \in (a, b]$ mit $y_1(\xi_0) \neq y_2(\xi_0)$

Sei o.B.d.A. $y_1(\xi_0) > y_2(\xi_0)$

Betr. $\alpha = \max\{x \in [a, \xi_0] : y_1(x) \leq y_2(x)\}$
$\Rightarrow \alpha < \xi_0$

Somit ist $y_1(\alpha) = y_2(\alpha)$ und für alle $x \in (\alpha, \xi_0]$ gilt

$y_1(x) > y_2(x)$

Dann ex. $\xi \in [\alpha, \xi_0]$ mit $y_1'(\xi) > y_2'(\xi)$

[sonst wäre $y_1'(x) \leq y_2'(x)$ für alle $x \in [\alpha, \xi_0]$

$$y_1(\xi_0) = \int_\alpha^{\xi_0} y_1'(t)\,dt + y_1(\alpha) \leq \int_\alpha^{\xi_0} y_2'(t)\,dt + y_2(\alpha) = y_2(\xi_0) \ \lightning\ ]$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung $y_1'(\xi) = f(\xi, y_1(\xi)) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} f(\xi, y_2(\xi)) = y_2'(\xi)$ $\lightning$

Bem: Die Voraussetzung „monoton fallend" kann nicht durch „monoton wachsend" ersetzt werden $\square$

Bsp: $y'(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y(x)},\ y(0) = 0$

$y_1(x) = 0$ ist Lösung

Ebenso ist $y_2(x) = x^{\frac{3}{2}},\ x \geq 0$ Lösung des AWPs

$y_2'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \overset{!}{=} \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{3/2}}$

Aufgabe 2.4: Sei $g(x) := y(x) - \lambda x$

Nach Voraussetzung ist g differenzierbar und $g'(a) = y'(a) - \lambda < 0 < \underbrace{y'(b) - \lambda}_{= g'(b)}$

z.z.: es ex. ein $x_0 \in (a,b)$ mit $g'(x_0) = 0$

Da $g'(a) < 0$ ex. $\eta \in (a,b)$ mit $g(\eta) < g(a)$

[Wäre $g(x) = g(a)$ für alle $x \in (a,b)$, so wäre $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$, $x \in (a,b)$, also

$g'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$]

Analog ex. ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) < g(b)$

Somit ist $\min_{x \in [a,b]} g(x) < \min\{g(a), g(b)\}$, d.h. g besitzt eine globale Minimalstelle

$x_0 \in (a, b)$. Also ist $g'(x_0) = y'(x_0) - \lambda$

b) Annahme: Es ex. ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und ein $y: I \to \mathbb{R}$,

y Lösung der DGL $y'(x) = f(y(x))$

Damit ist $y'(x) \in \{1, 2\}$, $x \in I$

Nach Teil a) gilt entweder $y'(x) = 1$, $x \in I$ oder $y'(x) = 2$, $x \in I$

Also ist $y(x) = x + c$, $x \in I$ oder $y'(x) = 2x + c$, $x \in I$

Ist $y(x) = x + c$, $x \in I$, dann ex. ein $\xi \in I$ mit $\xi + c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Dann gilt $y'(\xi) = 1 = f(y(\xi)) = f(\xi + c) = 2$ ↯

Ist $y(x) = 2x + c$, $x \in I$, dann ex. ein $\xi \in I$ mit $2\xi + c \in \mathbb{Q}$

Dann gilt $2 = y'(\xi) = f(2\xi + c) = 1$ ↯

Insgesamt: Die DGL besitzt keine Lösung

Aufgabe 2.2

b) i) Es sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in I mit $x_n \to x_0$, $n \to \infty$, $x_0 \in I$

Es gilt $y'(x_n) = f(\underset{\downarrow \atop x_0}{x_n}, \underset{\downarrow \atop y(x_0)}{y(x_n)}) \xrightarrow{f \text{ stetig}} f(x_0, y(x_0)) = y'(x_0)$

d.h. y' ist stetig.

Weiter ist $y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x)$, d.h. nach Voraussetzung ist y' diff'bar.

Da f stetig diff'bar ist und y' stetig ist, gilt

$$y''(x_n) = \underbrace{f_x(x_n, y(x_n))}_{\to f_x(x_0, y(x_0))} + \underbrace{f_y(x_n, y(x_n))}_{\to f_y(x_0, y(x_0))} \cdot \underbrace{y'(x_n)}_{\to y'(x_0)} \xrightarrow{n \to \infty} y''(x_0)$$

ii) Sei $z := \max\{y_1(x), y_2(x)\}$, $x \in I$

1. Fall: $x_0 \in I$ mit $y_1(x_0) \neq y_2(x_0)$

Sei o.B.d.A. $y_1(x_0) < y_2(x_0)$

Da y_2 stetig ist auf I ex. ein $\varepsilon > 0$ so, dass $y_2(x) > y_1(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon = [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap I$

Somit ist $z(x) = y_2(x)$, $x \in U_\varepsilon(x_0)$, und z ist diffbar mit

$z'(x_0) = y_2'(x_0) = f(x_0, y_2(x_0)) = f(x_0, z(x_0))$

2. Fall: $x_0 \in I$, $y_1(x_0) = y_2(x_0)$

Dann ist $y_1'(x_0) = f(x_0, y_1(x_0)) = f(x_0, y_2(x_0)) = y_2'(x_0)$

z ist diffbar in x_0

Sei $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $h_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $h_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $x+h_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$

Dann ist $$\frac{z(x_0+h)-z(x_0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{y_1(x_0+h_n)-y_1(x_0)}{h_n}, & y_1(x_0+h_n) \geq y_2(x_0+h_n) \\ \dfrac{y_2(x_0+h_n)-y_2(x_0)}{h_n} & y_2(x_0+h_n) \geq y_1(x_0+h_n) \end{cases}$$

und $$\lim_{n\to\infty} \frac{z(x_0+h_n)-z(x_0)}{h_n} = y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$$

Also ist $z'(x_0) = y_1'(x_0) = f(x_0, y_1(x_0)) = f(x_0, z(x_0))$

Insgesamt: z ist diffbar auf I und $z'(x) = f(x, z(x))$, $x \in I$.

Beispiel 1:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{1+x} - (1+x)y^4(x), \quad y(0) = -1$$

Bernoullische DGL [allg.: $y'(x) = g(x)y(x) + h(x)(y(x))^\alpha$, $\alpha \neq 1$]

Setze $u(x) = \frac{1}{y^3(x)}$, $u'(x) = -\frac{3y'(x)}{y^4(x)}$

$$y'(x) = \frac{-y}{1+x} - (1+x)y^4(x) \underset{\boxed{y \neq 0}}{\iff} \frac{y'(x)}{y^4(x)} = -\frac{y(x)}{1+x} \cdot \frac{1}{y^4(x)} - (1+x)$$

$$\iff -\frac{1}{3}u'(x) = \frac{1}{1+x}u(x) - (1+x)$$

Lösung des hom. Problems: $-\frac{1}{3}u_h'(x) = \frac{1}{1+x}u_h(x)$

$$u_h(x) = ce^{\int \frac{3}{1+x}dx} = ce^{\ln|x+1|^3} = c(x+1)^3, \quad c \in \mathbb{R}$$

Lösung des inhom. Problems:

$u_s(x) = c(x)(1+x)^3$

$$u_s'(x) = c'(x)(1+x)^3 + c(x)3(1+x)^2 \overset{!}{=} \frac{3}{1+x}c(x)(1+x)^3 + 3(1+x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = 3(1+x)^{-2}$$

$$c(x) = -3(1+x)^{-1}$$

Dann ist $v_s(x) = -3(x+1)^{-1}(1+x^3) = -3(1+x)^2$

Die allg. Lösung lautet $v(x) = c(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = \frac{1}{y^3(x)}$

Also ist $y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{c(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}$.

Anfangsbed. $y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{c-3}} \overset{!}{=} -1 \Rightarrow c = 2$

Lösung des AWPs:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}$$

Nst von $2(1+x)^3 - 3(1+x)^2$ sind $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$

Max. Existenzintervall $\underline{\underline{\left(-1, \frac{1}{2}\right)}}$.

<u>Beispiel 2:</u>

$$y'(x) = y^2(x) - (2x+1)y(x) + (1+x+x^2)$$

Erraten einer Lösung: $y_0(x) = x$

Ansatz für weitere Lösungen: $u(x) = y(x) - y_0(x) = y(x) - x$

$$y'(x) = u'(x) + 1 = y^2(x) - (2x+1)y(x) + (1+x+x^2)$$

$$= (u(x)+x)^2 - (2x+1)(u(x)+x) + (1+x+x^2)$$

$$= u^2(x) + \cancel{2xu(x)} + \cancel{x^2} - \cancel{2xu(x)} - \cancel{2x^2} - u(x) \cancel{-x} + 1 \cancel{+x} \cancel{+x^2}$$

$$= u^2(x) - u(x) + 1$$

$u'(x) = u^2(x) - u(x)$ Bernoullische DGL

$u(x) = \frac{1}{v(x)} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{u(x)}$

$v'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{u^2(x) - u(x)}{u^2(x)} = -1 + v(x)$

$v'(x) = v(x) - 1$ Lineare DGL

Lösungsansatz: $v(x) = ce^x + a$

inhom.! $v'(x) = ce^x \overset{!}{=} ce^x + a - 1 \iff a = 1$

Also ist $v(x) = ce^x + 1$ Lösung der linearen DGL, $u(x) = \frac{1}{ce^x+1}$

und $y(x) = \frac{1}{ce^x+1} + x$, $c \in \mathbb{R}$