Vorbereitung zur $\frac{e}{m}$-Bestimmung

Armin Burgmeier (1347488) Gruppe 15

28. Oktober 2007

1 $\frac{e}{m}$-Bestimmung mit der Fadenstrahlröhre

1.1 Halleffekt

Hallsonden werden verwendet um Magnetfelder zu messen. Sie basieren auf dem Halleffekt, der hier kurz beschrieben werden soll.

Auf geladene, bewegte Teilchen im Magnetfeld wirkt die Lorentzkraft $\vec{F_L} = q\vec{v} \times \vec{B}$, auf geladene Teilchen im elektrischen Feld eine elektrische Kraft $\vec{F_{el}} = q\vec{E}$.

Dies trifft auch auf Ladungsträger in einem elektrischen Leiter zu. Fließe also ein Strom I durch einen Leiter, der so in ein Magnetfeld gebracht wird, dass er senkrecht zu den Feldlinien des Feldes steht. Der Einfachheit halber sei das Koordinatensystem so gewählt, dass sich die Elektronen im Leiter in x-Richtung bewegen und das Magnetfeld in z-Richtung zeigt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \tag{1}$$

Auf die Elektronen im Leiter wirkt die Lorentzkraft wodurch sie an den Rand des Leiters abgelenkt werden. Die positiven Ladungsträger hingegen sind nicht frei beweglich. So findet eine Ladungstrennung statt und zwischen positiven und negativen Ladungsträgern entsteht ein elektrisches Feld $\vec{E}$. Betrachtet man den Leiter als Plattenkondensator, so ergibt sich $|E| = \frac{U_H}{d}$, wobei U_H die Hallspannung (die gemessen werden kann) und d die Dicke des Leiters ist.

Über die Stromdichte $\vec{j} = nev$ (mit der Ladungsträgerdichte n) und $|j| = \frac{I}{A}$ (mit dem Leiterquerschnitt A) kann man schließlich eine Beziehung zwischen der Stromstärke I und der Geschwindigkeit der Elektronen $\vec{v}$ finden.

Die abstoßende Kraft $\vec{F_L}$ und die anziehende elektrische Kraft $\vec{F_{el}}$ stehen in einem Gleichgewicht, sodass gilt:

$$e\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{E} \tag{2}$$

Setzt man die oben genannten Beziehungen ein, so erhält man für B:

$$B = \frac{neA}{Id} U = kU \tag{3}$$

Die Größe k hängt nur vom Leiter und der verwendeten Stromstärke ab. Sie kann experimentell bei bekanntem Magnetfeld $\vec{B}$ (zum Beispiel das einer langen Spule) ermittelt werden.

1.2 Messverfahren

In einem Helmholtzspulenpaar, dessen Abstand dem Radius der Spulen entspricht, ist das von einem Spulenstrom I erzeugte Magnetfeld auf der Mittelachse zwischen den Spulen nahezu homogen. In diesem Bereich werden in einem Fadenstrahlrohr von einer Heizkathode erzeugte Elektronen mit Hilfe einer Anode (Anodenspannung U) so beschleunigt, dass die Geschwindigkeit der Elektronen senkrecht zum Magnetfeld steht, sodass sie eine Kreisbahn beschreiben. In dem Fadenstrahlrohr befindet sich ein Gas, das die Elektronen zum Leuchten anregt. Somit wird der Elektronenstrahl sichtbar gemacht.

Die Geschwindigkeit der Elektronen ergibt sich nach dem Energiesatz zu:

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}} \tag{4}$$

Die Lorentzkraft zwingt die Elektronen auf eine Kreisbahn, sie wirkt daher als Zentripetalkraft. Folglich gilt die Beziehung

$$\frac{mv^2}{r} = evB \tag{5}$$

mit dem Kreisradius r und der magnetischen Flussdichte B. Nach Umformung ergibt sich daraus direkt der Wert für $\frac{e}{m}$:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2} \tag{6}$$

Das Magnetfeld B kann mit der oben vorgestellten Hallsonde gemessen werden. Die Konstante k wird vorher mit Hilfe einer speziellen Eichspule mit Länge $L = 300mm$, Radius $R = 7,6mm$, $\frac{n}{L} = 2625 \frac{Windungen}{m} \pm 1\%$ bestimmt.

Der Radius r der Kreisbahn kann gemessen werden, da die Bahn der Elektronen sichtbar gemacht wird. Allerdings sollte besser der Durchmesser $d = 2r$ gemessen werden, da der Mittelpunkt des Kreises nicht direkt ersichtlich ist.

2 $\frac{e}{m}$-Bestimmung nach der Methode von Busch

2.1 Versuchsaufbau

In einer stromdurchflossenen Spule befindet sich eine Heizkathode, die Elektronen emittiert. Sie werden durch eine Elektrode beschleunigt und durch einen Wehneltzylinder auf einen engen Querschnitt konzentriert. Dabei passieren sie zwei Ablenkplatten, an die man eine Wechselspannung anlegen kann. Am anderen Ende der Spule kommen sie sichtbar auf einem Leuchtschirm auf.

Die Spule ist allerdings im Verhältnis zu ihrem Radius nicht "lang", das heißt, das erzeugte Magnetfeld ist nicht homogen. Stattdessen gilt:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2L} \left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{L - a}{\sqrt{R^2 + (L-a)^2}} \right) = kI \tag{7}$$

wobei L die Länge der Spule, R deren Radius, n die Anzahl der Windungen und a der Abstand des Feldortes vom Ende der Spule. Wir mitteln B über drei Werte von a: Dem Ende der Spulen, dem hinteren Ende der Ablenkplatten und in der Mitte dazwischen. Alle Werte bis auf I sind konstant und lassen sich daher in der Konstanten k zusammenfassen.

2.2 Messprinzip

Durch die Wechselspannung an den Ablenkplatten zeigt sich ein Strich auf dem Schirm. Fließt ein Strom durch die Spule, so erscheint der Strich gedreht, da eine Lorentzkraft auf die Elektronen wirkt. Ist θ der Winkel um den ein Elektron abgelenkt wird, so ist $v \sin\theta$ die Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld. Aus Gleichsetzen der Lorentzkraft mit der Zentripetalkraft folgt für die Umlaufdauer T der Elektronen:

$$T = \frac{2\pi m}{Be} \tag{8}$$

Ist die Strecke $Tv\cos\theta$, die ein Elektron während eines Umlaufs parallel zu den Feldlinien zurücklegt gleich der Länge l zwischen den Ablenkplatten und dem Schirm, so wird der Strich auf dem Schirm wieder zu einem Punkt, da sich alle Elektronen wieder auf dem ursprünglichen Strahl (vor dem Eintritt in die Ablenkplatten) befinden. Ist θ klein, gilt also $\cos\theta \approx 1$, so kann diese Bedingung für alle Elektronen von der gleichen magnetischen Flussdichte B (und nach Gleichung 7 damit vom gleichen Spulenstrom I) erfüllt werden.

Die Geschwindigkeit v der Elektronen beträgt nach dem Energiesatz wieder

$$v = \sqrt{\frac{2U_{g2}e}{m}} \tag{9}$$

wobei U_{g2} die Spannung an der Beschleunigungselektrode ist. Mit den Gleichungen 8 und 9 ergibt sich

$$Tv\cos\theta = l \Leftrightarrow \frac{2\pi m}{Be}\sqrt{\frac{2U_{g2}e}{m}} = l \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U_{g2}}{B^2 l^2}$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung 7 sieht man, dass sich $\frac{e}{m}$ aus der Geradensteigung ablesen lässt, wenn man U über I^2 aufträgt:

$$U = \frac{k^2 l^2}{8\pi^2}\frac{e}{m} I^2 \tag{10}$$