

P2-73: Gamma-Spektroskopie und Statistik

Kirstin Hübner (1348630) Armin Burgmeier (1347488)

Mo-15, 21. April 2008

1 Grundlagen

1.1 Gammastrahlung

Gammastrahlung ist eine kurzwellige elektromagnetische Strahlung, die aus Atomkernen stammt:

Bei Atomkernen existieren verschiedene erlaubte Energiezustände. Die Kerne in den verschiedenen Zuständen werden als isomer bezeichnet, das heißt sie unterscheiden sich in der Anordnung der Nukleonen (Atomkernbausteine), allerdings nicht in Ordnungs- und Massenzahl. Neben dem Grundzustand existiert eine abzählbare Folge von kurzlebigen Anregungsniveaus. Der Übergang der angeregten Zustände in den Grundzustand kann abhängig von der Kernart in einem einzigen Elementarakt oder in mehreren Teilübergängen stattfinden. Die dabei frei werdende Energie ΔE wird als γ -Strahlung mit der Quantenenergie $\Delta E = hf_\gamma$ im Falle eines Elementarakts bzw. $\Delta E = \sum_i hf_{\gamma_i}$ bei i Teilübergängen emittiert. Das so entstehende γ -Linienpektrum ist für die emittierende Kernsorte charakteristisch, das heißt das durch die Analyse von γ -Spektren die beteiligten Nuklide identifiziert werden können. In der Natur kommen dabei Quantenenergien zwischen mehreren keV und einigen MeV vor.

Da angeregte Zustände von Atomkernen sowohl durch natürliche Prozesse wie auch durch künstlich erzeugte Kernumwandlungen erzeugt werden, tritt γ -Strahlung meist zusammen mit α - und β -Strahlung auf. Bei diesen beiden Strahlungen handelt es sich um geladene Teilchen, wodurch die Gammastrahlung gut von ihnen unterschieden werden kann.

Zum einen wird γ -Strahlung in elektrischen und magnetische Feldern nicht abgelenkt, da es sich um elektromagnetische Strahlung handelt und zum anderen hat sie bei gleicher Energie eine wesentliche höhere Durchdringungsfähigkeit als α - bzw. β -Strahlen. Dieser unterschied kann durch das Verhalten der Strahlungen in Materie erklärt werden. α - und β -Strahlen ionisieren auf ihrer kompletten Bahn und geben somit stetig kinetische Energie ab, bis sie diese aufgebraucht ist. Im Gegensatz dazu gibt es bei der γ -Strahlung nur eine energieabhängige Wahrscheinlichkeit, dass Energie an die Materie abgegeben wird.

Es ist also wichtig zu wissen, wie die Wechselwirkung zwischen γ -Strahlung und Materie abläuft.

1.2 Wechselwirkung von Gamma-Strahlung mit Materie

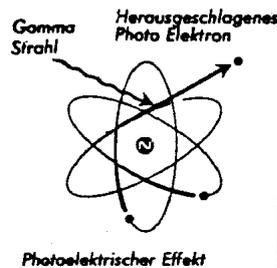
Wird Materie von γ -Strahlen durchlaufen kann es im Wesentlichen zu drei Wechselwirkungen kommen, die zu einem Energieverlust oder einer Umwandlung der γ -Quanten führen, dem Photoeffekt, der Compton-Streuung und der Paarbildung.

1.2.1 Photoeffekt

Trifft ein γ -Quant auf ein Atom, so wird es in einem Elementarakt absorbiert. Die Strahlungsenergie geht dabei in Ionisierungsenergie des Atoms und kinetische Energie des ausgelösten Elektrons, welches aus einer der inneren Schalen stammt, über:

$$hf_{\gamma} = W_A + E_{kin,e^-}$$

Das heißt, der Photoeffekt ist nur möglich, wenn die Energie des γ -Quants höher als die Bindungsenergie des Elektrons ist. Das γ -Quant ist nach dem Prozess verschwunden. Schematisch kann dies in folgender Abbildung dargestellt werden.



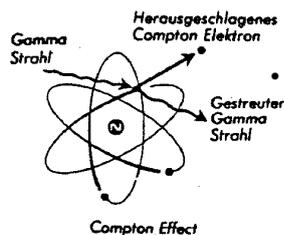
Quelle: Vorbereitungshilfe von W. Jüngst

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Photoeffekts nimmt mit einer höheren Potenz mit der Kernladungszahl zu. Andererseits sinkt die Wahrscheinlichkeit mit zunehmender Quantenenergie.

Zu beachten ist in diesem Zusammenhang die bei $Cs-137$ auftretende Röntgenlinie, da sie oft fehlinterpretiert wird. Sie wird beim Übergang des angeregten $Ba-137$ -Kerns in seinen Grundzustand erzeugt, da hierbei oft die Energie abzüglich der Bindungsenergie auf ein kernnahes Elektron übertragen wird, welches die $Cs-137$ -Quelle verlässt. Die Röntgenstrahlung wird emittiert, wenn äußere Elektronen in das so entstandene Loch nachrücken. Im γ -Spektrum der Quelle kann man diese $32keV$ -Strahlung als deutlichen Photopeak beobachten.

1.2.2 Compton-Streuung

Dieser Prozess beschreibt den Stoß eines γ -Quants mit einem schwach gebundenen Hüllenelektron, das in diesem Fall als freies Elektron betrachtet werden kann. Es handelt sich dabei um einen elastischen Stoß, es gelten also Energie- und Impulserhaltung im System der Stoßpartner.



Quelle: Vorbereitungshilfe von W. Jüngst

Während des Stoßprozesses wird dem Elektron je nach Streuwinkel ein Teil der Energie des γ -Quants übertragen und es entsteht so ein neues energieärmeres Quant, das sich unter einem Winkel ϑ gegen die ursprüngliche Richtung bewegt. Für den Zusammenhang zwischen Streuwinkel ϑ und der zugehörigen Wellenlängenänderung folgt aus den Erhaltungssätzen¹

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$$

Hieraus folgt zudem, dass die maximale Wellenlängenänderung für $\vartheta = 180^\circ$ auftritt. Da die Energieänderung der γ -Quanten der kinetischen Energie der Elektronen nach dem Stoß entspricht folgt für diese:

$$E_{kin} = h\Delta f = hf \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{hf}{m_0 c^2} 2 \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)} \right)$$

Die maximale kinetische Energie wird für $\vartheta = 180^\circ$ erreicht und beträgt

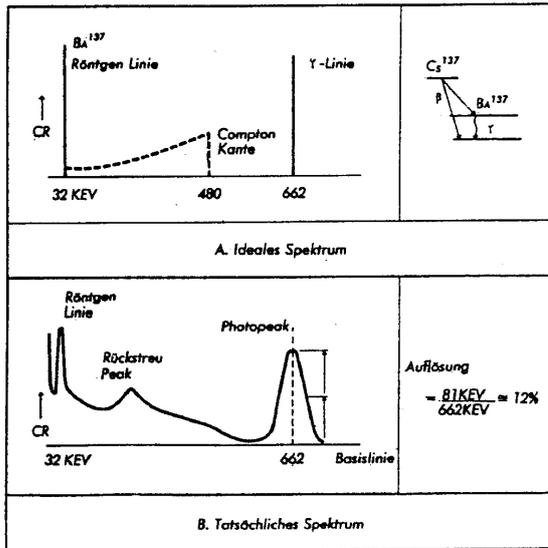
$$E_{max} = hf \left(1 - \frac{1}{1 + 2 \frac{hf}{m_0 c^2}} \right)$$

Sie wird zudem als Comptonkante bezeichnet und kann im kontinuierlichen Energiespektrum des gestoßenen Elektrons beobachtet werden. Mit der Kernladungszahl der Materie, also der Anzahl der vorhandenen Elektronen, steigt die Wahrscheinlichkeit für Compton-Streuung linear an. Zum anderen fällt die Wahrscheinlichkeit mit steigender Quantenenergie.

Aus dem Comptoneffekt und der Tatsache, dass ein Elektronen-Energiespektrum gemessen wird folgt, dass bei einer scharfen γ -Linie nicht auch ein „Ein-Linien-Spektrum“ gemessen werden kann. Das heißt aus dem gemessenen Spektrum können lediglich Rückschlüsse auf das eigentliche γ -Spektrum gezogen werden. γ -Quanten können zudem durch Compton-Streuung in der Materie außerhalb des Kristalls wieder in den Kristall gestreut werden. Dabei handelt es sich hauptsächlich um rückgestreute Quanten, das heißt ihnen fehlt die Energie der Comptonkante. Diese Quanten verursachen den sogenannten Rückstreupeak.

In folgender Abbildung kann man die von Photoeffekt und Compton-Streuung hervorgerufenen Veränderungen des Spektrums klar erkennen. Als Beispiel wurde hier das γ -Spektrum von $Cs-137$ herangezogen. Zu sehen ist zum einen die durch den Photoeffekt verursachte Röntgenlinie sowie der eben erläuterte Rückstreupeak.

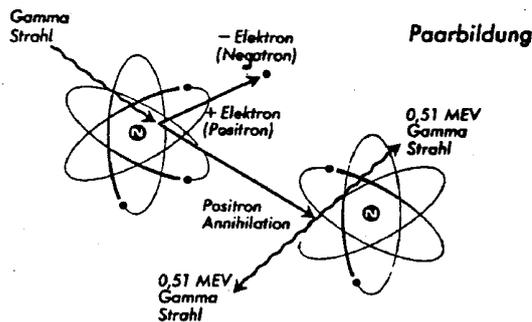
¹Vgl. Eichler, Kronfeldt, Sahn: Das neue Physikalische Grundpraktikum, S. 511



Quelle: Vorbereitungshilfe von W. Jüngst

1.2.3 Paarbildung

Diese dritte Art der Wechselwirkung von γ -Quanten mit der durchstrahlten Materie beschreibt den Vorgang der Materialisierung von γ -Quanten, bei dem ein Elektron-Positron-Paar gebildet wird.



Quelle: Vorbereitungshilfe von W. Jüngst

Die Energiebilanz dieses Vorgangs lässt sich mit Hilfe der Masse-Energie-Beziehung wie folgt darstellen:

$$hf_{\gamma} = 2m_0c^2 + E_{kin}$$

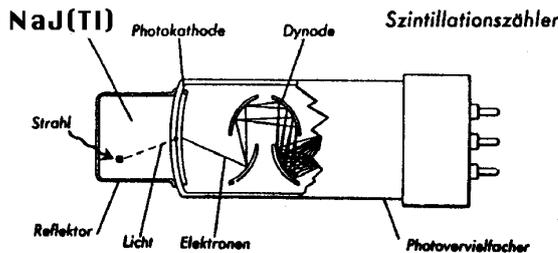
wobei E_{kin} die kinetische Gesamtenergie von Positron und Elektron beschreibt. Aus dieser Gleichung folgt mit der Energieerhaltung, dass die Paarbildung nur bei Quantenenergien möglich ist, die größer als die zweifache Ruheenergie des Elektrons sind, es muss also $hf_{\gamma} \geq 1,022 \text{ MeV}$ gelten.

Sowohl Elektron als auch Positron können Atome anregen, sie zerstrahlen jedoch nach kurzer Zeit, wobei zwei antiparallele Quanten ausgesendet werden, die wiederum Photoeffekte sowie Comptoneffekte auslösen können. Verlässt einer dieser Quanten die Detektormaterie entstehen sogenannte „escape-peaks“.

Die Paarbildung wird umso wahrscheinlicher je höher die Energie ist und ist ab ca. 10MeV der dominierende Prozess. Da jedoch in unserem Versuch keine so hohen Energien verwendet werden spielt die Paarbildung keine bzw. nur eine sehr geringe Rolle.

1.3 Aufbau und Wirkweise des Detektors

In unserem Versuch verwenden wir für die Gamma-Spektroskopie die Nachweismethode mit Szintillator, Photokathode und Sekundärelektronenvervielfacher (SEV), da diese weit verbreitet und zudem preiswert ist.



Quelle: Vorbereitungshilfe W. Jüngst

Ein Szintillator ist eine Substanz, die unter der Einwirkung von schnellen geladenen Teilchen Photonen im sichtbaren oder UV-Spektralbereich aussendet. Der uns zu Verfügung stehende Szintillationskristall besteht aus Natriumjodid (NaJ) und ist mit Thallium (Tl) dotiert. Da die γ -Quanten selbst ungeladen sind können sie Szintillation nur über den Umweg der Erzeugung geladener Teilchen hervorrufen. Die Dicke des Detektor-Kristalls sollte daher so gewählt werden, dass die γ -Quanten mit hoher Wahrscheinlichkeit wechselwirken. Löst ein γ -Quant einen Photoeffekt aus, so gibt das dadurch entstandene Elektron seine Energie nach und nach in einer Vielzahl von Prozessen ab. Da es sich beim NaJ -Kristall um einen Isolator handelt entstehen dabei Elektronen und Löcher im Leitungs- bzw. Valenzband. Deren Anzahl z_0 ist proportional zur Energie des auslösenden Gamma-Quants. Die meisten der Elektron-Lochpaare rekombinieren wieder strahlungslos und geben die freiwerdende Energie als Wärme an den Kristall ab. Ein Bruchteil von x Ladungsträgerpaaren wird jedoch über die dotierten Tl -Atome unter Emission von sichtbarer blauer Strahlung rekombiniert. In diesem Prozess entsteht aus dem primären γ -Quant somit $z_1 = xz_0$ „sichtbare Photonen“, deren Anzahl proportional zu hf_γ ist. Zusätzlich zum Photoeffekt tritt im Kristall auch immer Compton-Streuung auf. Da in diesem Fall vom primären γ -Quant nur ein Teil seiner Energie an das Elektron abgegeben wird verursacht dieses auch nur eine geringe Anzahl „sichtbarer Photonen“ $z'_1 \propto (hf_\gamma - hf'_\gamma)$. Das gestreute γ -Quant verlässt den Kristall im Normalfall ohne nochmals wechselzuwirken.

Aufgabe des SEV ist es nun, das so erzeugte schwache optische Signal in einen registrierbaren elektrischen Impuls umzuwandeln. Dazu wird in unserem Fall ein Photomultiplier verwendet, welcher aus einer Photokathode, mehreren Dynoden und einer Anode besteht die wie in der Abbildung angedeutet in einer Vakuumröhre angeordnet sind. Um möglichst viele Photonen auf die Kathode zu lenken ist der Szintillatorkristall mit einer diffus reflektierenden Schicht umgeben. Dadurch erreichen ca. zwei Drittel der Lichtquanten die

Kathode an der etwa jedes vierte ein Photoelektron auslöst. Eine angelegte Spannung bewirkt nun, dass das ausgetretene Elektron auf die erste Dynode hin beschleunigt wird und dort wiederum Elektronen auslöst. Allgemein liegt jede weitere Dynode auf einem ca. 100V höherem Potential und die beschleunigten Elektronen lösen drei- bis fünfmal mehr Elektronen aus. Dadurch kommt es zu einem lawinenartigen Anstieg der Elektronenzahl bis zum Erreichen der Anode. Über sie fließt die erzeugte Ladung ab. Der Stromimpuls am Ausgang wird als Spannungsimpuls U_A über einem Messwiderstand abgenommen. Da U_A proportional zur Anzahl der an der Kathode ausgelösten Elektronen ist, ist die gemessene Spannung auch proportional zur Energie des auslösenden γ -Quants.

2 Aufgaben

2.1 Impulshöhenspektren

In diesem ersten Versuchsteil sollen Impulshöhenspektren verschiedener radioaktiver Materialien gemessen und analysiert werden. Dazu wird das Ausgangssignal des Photomultipliers mit Hilfe des Programms CASSY erfasst und dargestellt. Trägt man die Spannung über der Zeit auf, stellt man fest, dass während der Messung einige Spannungswerte häufiger vorkommen als andere. Um die Häufigkeit einzelner Spannungsintervalle messen zu können, teilt man die Impulshöhensache in gleich große Intervalle ΔU . Jedem dieser Spannungsintervalle wird nun ein Kanal zugeordnet. Nun kann die Häufigkeit der Spannungsimpulse im jeweiligen Intervall gemessen werden. Dabei bedeutet ein hoher Wert, dass die zum Kanal gehörende Elektronenenergie im Szintillatorkristall häufig aufgetreten ist.

2.1.1 Impulshöhenspektrum von $Cs-137$ im Einkanalbetrieb

Einer Einkanalanalyse liegt folgendes Messschema zu Grunde: zunächst legt man ein konstantes Spannungsintervall ΔU fest. Dieses wird nun so über den gesamten Messbereich geschoben, dass in einer festgelegten Messzeit die Zahl der Pulse im Intervall $U + \Delta U$ gezählt wird, in der darauffolgenden Messzeit die Anzahl der Impulse im Bereich $U + \Delta U$ bis $U + 2\Delta U$ usw.

Um den dynamischen Bereich des Detektors voll auszunutzen müssen zunächst die Betriebsspannung des SEV und die Software-Verstärkung dementsprechend eingestellt werden. Der Abstand zwischen radioaktiver Quelle und Szintillatorvorderfläche wird so gewählt, dass die Zählrate im Vielkanalmodus mindestens 1000 pro Sekunde beträgt. In der Aufgabenstellung wird zudem angegeben, dass eine Zerlegung des Spektrums in 50 Intervalle und eine Messdauer von 10 Sekunden pro Intervall zweckmäßig ist.

2.1.2 Impulshöhenspektrum und Untergrundspektrum von $Cs-137$, $Na-22$ und $Co-60$ mit Hilfe des 512-Kanalbetriebs

Im Gegensatz zur Einkanalanalyse werden bei der Vielkanalanalyse die unterschiedlichen Pulshöhen gleichzeitig registriert und zugeordnet. In unserem Fall wird der Messbereich

also in 512 gleichgroße Intervalle gegliedert. Der Vorteil der Vielkanalmessung ist, dass bei gleicher Gesamtmesszeit die Zählzeit pro Kanal höher ist was sich positiv auf die Zählstatistik auswirkt.

Zunächst werden SEV und Software-Verstärker so eingestellt, dass der dynamische Bereich des Detektors für *Co-60* optimal ausgenutzt wird. Diese Einstellung bleibt auch bei den Messungen mit den anderen Substanzen erhalten. Der Abstand zwischen Präparat und Szintillator soll dabei jeweils so gewählt werden, dass die effektive Zählrate für alle drei Präparate ungefähr gleich ist und im Bereich von 1000/s und 1500/s liegt. Zudem soll in diesem Versuchsteil der Einfluss der Untergrundstrahlung untersucht werden. Dazu zeichnet man ein Spektrum auf ohne Strahlungsquelle auf. Dieses muss dann von den Spektren der Präparate subtrahiert werden.

2.1.3 Deuten der erhaltenen Impulshöhenspektren

Nun sollen die in den vorherigen Messungen erhaltenen Spektren analysiert und gedeutet werden. Dazu wird mit Hilfe des Photopeaks von *Cs-137* (662keV) eine Energieskalierung vorgenommen. Dann können jeweils charakteristische Stellen wie Photopeak, Rückstreupic und Compton-Kante der Präparate bestimmt werden:

- Photopeak: Gibt die Gesamtenergie des Quants an, $E_\gamma = hf_\gamma$
- Compton-Kante: $E_C = hf_\gamma \left(1 - \frac{1}{1 + 2 \frac{hf_\gamma}{m_0c^2}} \right)$
- Rückstreupic: $E_R = E_\gamma - E_C$

Für die Energien des Comptonkante und der Rückstreupeaks ergibt sich:

Präparat	E_γ in keV	E_C in keV	E_R in keV
<i>Cs-137</i>	662	477,65	184,35
<i>Co-60</i>	1178	968,04	209,96
	1333	1118,6	214,4
<i>Na-22</i>	511	340,67	170,33
	1275	1062,15	212,85

Die charakteristische Auflösung des Detektors wird durch die Anzahl n_e der Elektronen, die bei einem Impuls der zum Photopeak beiträgt und von der Photokathode emittiert wurden, festgelegt. Beschreibt ΔE die Halbwertsbreite der Photolinie und E die Mittenenergie des Peaks, so gilt

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{\sqrt{n_e}} \Rightarrow n_e = \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2$$

Durch Überlagerung der Spektren kann die Linearität der Apparatur überprüft werden.

2.2 Bestimmen der Aktivität des $Cs-137$ -Präparats

Zur Bestimmung der Aktivität des $Cs-137$ -Präparats soll die von CASSY berechnete Zählrate n sowie die Nachweiswahrscheinlichkeit q des Szintillatorkristalls verwendet werden. Diese kann in Abhängigkeit vom Abstand und der betreffenden Strahlungsenergie aus dem Diagramm in der Vorbereitungshilfe entnommen werden. Mit der Zählrate $n = \frac{N}{q}$ gilt:

$$A = \frac{N}{tq} = \frac{n}{t}$$

Es soll für mindestens drei verschiedene Abstände gemessen werden, um einen Ausgleichswert berechnen zu können. Außerdem soll überprüft werden, ob eine Totzeitkorrektur der Zählraten notwendig ist.

2.3 Statistische Analyse der Messungen

2.3.1 Statistische Verteilung von gemessenen Ereigniszahlen bei häufig wiederholter Messung unter gleichen Bedingungen

Es sollen mindestens 150 Vielkanalmessungen mit 256 Kanälen und einer Messzeit von je 1s im Modus „wiederholende Messung“ aufgenommen werden, um einen ausreichend großen statistischen Daten-Pool zu erreichen. Nun sollen zwei Stichproben mit je 150 Zahlen gebildet werden:

- a) Zum einen soll die Zählrate aus einem Teil des Spektrums aufintegriert werden, so dass man im Mittel 3 Zerfälle pro Zeiteinheit erhält. Das heißt man wählt feste Kanäle so aus, dass für jede der 150 aufgenommenen Spektren in diesem Bereich ca. 3 Zerfälle pro Sekunde auftreten, also auch in der Summation über alle 150 Summen im Mittel 3 Zerfälle aufgezeichnet werden.
- b) Zum anderen soll die Gesamtzählrate der einzelnen Spektren verwendet werden. In diesem Fall summiert man bei jedem Spektrum über alle Kanäle und erhält so jeweils die Gesamtzählrate. Bildet man darüber den Mittelwert erhält man die durchschnittliche Gesamtzählrate.

Zudem soll zu beiden Stichproben eine Häufigkeitsverteilung der Zerfallsanzahl aufgestellt werden. Wobei hierbei mit Zerfallsanzahl die Summe der Zerfälle für jedes (Teil-) Spektrum beschreibt. Da es beispielsweise sein kann, dass mehrmals $x = 0$ Impulse innerhalb der Zählzeit beobachtet werden, können die Messergebnisse x_i ($i = 1, \dots, n$) in Klassen aufgeteilt werden, wobei m_0 -mal der Wert $x = 0$, m_1 -mal der Wert $x = 1$, allgemein k -mal der Wert $x = k$ auftritt. Die Häufigkeit h_k mit der dann gerade $x = k$ Impulse gezählt wurden ergibt so somit zu

$$h_k = \frac{m_k}{n}$$

2.3.2 Berechnen von Mittelwert, Standardabweichung und Standardabweichung des Mittelwerts

Der Mittelwert x_m einer Stichprobe ist definiert als die Summe aller Werte x_i geteilt durch ihre Anzahl n :

$$x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Die Standardabweichung s einer Stichprobe berechnet sich als Wurzel der Varianz und ist wie diese ein Streuungsmaß.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}$$

Die Standardabweichung des Mittelwerts ist definiert als

$$s_{x_m} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}$$

Zudem soll überprüft werden, ob die Stichproben Poisson-verteilt sind. In diesem Fall muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$s = \sqrt{x_m}$$

2.3.3 Graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilungen

In diesem Aufgabenteil sollen die Häufigkeitsverteilungen graphisch dargestellt werden. Zudem sollen in diesen Diagrammen die Graphen von Gauß- und Poissonverteilung eingezeichnet werden.

Die Poissonverteilung ist gegeben durch

$$h_k = \frac{x_m^k}{k!} e^{-x_m}$$

Ebenso wie diese ist auch die Gaußverteilung eine Folgerung aus der statistischen Theorie der Zählprozesse. Die Gaußverteilung, auch Normalverteilung genannt, wird im Normalfall zur Fehlerbetrachtung verwendet. Es kann jedoch sein, dass die Poisson-Verteilung die Zählstatistik besser annähert, falls gewisse Bedingungen erfüllt sind. So wurde bei der Ableitung der Poisson-Verteilung vorausgesetzt, dass während der Messzeit nur ein sehr geringer Teil der Atome zerfällt und dass der Zerfall eines Atoms als unabhängig von seiner Vorgeschichte und vom Zerfall der anderen Atome angenommen werden kann. Ist der Mittelwert der Zählrate deutlich größer als 1, gilt also $x_m \gg 1$, so kann die Poisson-Verteilung durch die Gaußverteilung angenähert werden. Für sie gilt

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(k-x_m)^2}{2s^2}}$$

2.3.4 Chi-Quadrat-Test

In diesem abschließenden Aufgabenteil soll mit Hilfe des Chi-Quadrat-Tests bei einer zu wählenden Signifikanzzahl die Hypothese geprüft werden, dass die erste Stichprobe

1. aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammt
2. aus einer poissonverteilten Grundgesamtheit stammt

Allgemein muss bei statistische Test immer eine Hypothese H_0 und eine Alternative H_1 vorgegeben werden. Im Falle von 1. wäre H_0 =(die Stichprobe stammt aus einer normalverteilten Gesamtheit) und H_1 =(die Stichprobe stammt nicht aus einer normalverteilten Gesamtheit).

Bei der Durchführung des Tests wir zunächst eine Irrtumswahrscheinlichkeit α vorgegeben. Sie gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit maximal eine falsche Annahme verifiziert werden darf. Dann wird der zur Stichprobe gehörende χ^2 -Wert bestimmt. Dieser ist definiert als

$$\chi^2 = \sum_k \frac{(B - E)^2}{E}$$

Dabei beschreibt B die beobachtete und E die erwartete Häufigkeit. Zudem muss die Stichprobe in k Klassen eingeteilt und die beobachteten Zahlen voneinander unabhängig sein. Der so bestimmte Wert für χ^2 wird nun mit Hilfe einer in der Vorbereitungshilfe gegebenen Tabelle beurteilt. Dazu benötigt man die Anzahl f der zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade. Zunächst stehen $k - 1$ Freiheitsgrade zur Verfügung. Müssen jedoch zur Berechnung der erwarteten Häufigkeiten n Parameter geschätzt werden so muss diese Zahl von den Freiheitsgraden abgezogen werden: $f = k - 1 - n$.

Nun können Hypothese und Alternative überprüft werden. Dabei wird die Hypothese abgelehnt, falls der berechnete χ^2 -Wert größer oder gleich dem aus der Tabelle entnommene Wert ist.